

2027학년도 9월 모의평가 수학

전 문항 직접 풀이와 정답

첨부 문제지 20쪽을 직접 확인하여 공통 22문항과 선택과목별 8문항, 총 46문항을 처음부터 풀었다. 외부 정답표나 해설은 사용하지 않았다. 수식 전개와 조건 확인으로 답을 구한 뒤, 경우의 수 등 일부 계산은 별도 계산으로 검산하였다.

원문: 2027학년도-9월-모의평가-수학-문제.pdf. 아래 쪽수는 원문 PDF의 전체 20쪽 기준이다. 객관식은 선지 번호와 실제 값을 함께 표시한다.

정답표

공통 문항	정답	공통 문항	정답
1	④	12	④
2	③	13	⑤
3	②	14	⑤
4	②	15	④
5	①	16	6
6	⑤	17	11
7	②	18	38
8	③	19	15
9	①	20	17
10	③	21	12
11	③	22	97
문항	확률과 통계	미적분	기하
23	①	④	①
24	④	①	②
25	⑤	③	④
26	②	②	⑤
27	③	⑤	③
28	⑤	④	②
29	190	81	60
30	170	49	457

공통과목 · 1~22번

1번 · 지수법칙 (원문 1쪽)

밑을 2로 통일한다.

$$2^{3/2} \times 4^{-1/2} = 2^{3/2} \times 2^{-1} = 2^{1/2}.$$

정답: ④, $\sqrt{2}$.

2번 · 미분계수의 정의 (원문 1쪽)

주어진 극한은 $f'(2)$ 이다. $f(x) = 2x^3 - x - 4$ 이므로

$$f'(x) = 6x^2 - 1, \quad f'(2) = 24 - 1 = 23.$$

정답: ③, 23.

3번 · 등차수열 (원문 1쪽)

공차를 d 라 하면 $a_{10} - a_7 = 3d = 9$ 이므로 $d = 3$ 이다.

$$a_7 = a_2 + 5d = 2 + 15 = 17.$$

정답: ②, 17.

4번 · 조각함수의 연속 (원문 1쪽)

두 식은 각각 다항식이므로 경계 $x = 2$ 에서만 연속 조건을 확인하면 된다.

$$14 + a = 4 + 2a \Rightarrow a = 10.$$

정답: ②, 10.

5번 · 다항함수의 정적분 (원문 2쪽)

$$\int_0^2 (2x^3 + 6x^2 - x) dx = \left[\frac{x^4}{2} + 2x^3 - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 8 + 16 - 2 = 22.$$

정답: ①, 22.

6번 · 삼각함수의 최댓값과 주기 (원문 2쪽)

$a, b > 0$ 이므로 최댓값은 $a + 2 = 5$, 주기는 $2\pi b = 8\pi$ 이다. 따라서 $a = 3$, $b = 4$ 이다.

정답: ⑤, $a + b = 7$.

7번 · 극값 (원문 2쪽)

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 4a.$$

$x = 1$ 에서 극소이므로 $f'(1) = 6 - 2a = 0$, 즉 $a = 3$ 이다. 이때

$$f'(x) = 6(x + 2)(x - 1).$$

부호가 $x = -2$ 에서 양수에서 음수로 바뀌므로 극댓값은

$$f(-2) = -16 + 12 + 24 = 20.$$

정답: ②, 20.

8번 · 등비수열 (원문 3쪽)

첫째항을 A , 공비를 r 라 하자. 모든 항이 양수이므로 $A > 0, r > 0$ 이다.

$$\frac{1+r+r^2}{1+2r} = \frac{7}{3} \Rightarrow 3r^2 - 11r - 4 = (3r + 1)(r - 4) = 0.$$

따라서 $r = 4$ 이고 $a_8/a_6 = r^2 = 16$ 이다.

정답: ③, 16.

9번 · 속도와 가속도 (원문 3쪽)

위치를 미분하여 두 속도를 같게 놓는다.

$$12t^2 - 2t - 11 = 4t + 7 \Rightarrow 6(2t - 3)(t + 1) = 0.$$

$t \geq 0$ 이므로 $t = 3/2$ 이다. 두 가속도는 각각 $24t - 2$ 와 4이므로 $p = 34, q = 4$ 이다.

정답: ①, $p - q = 30$.

10번 · 지수함수와 수평선 (원문 3쪽)

두 교점의 가로좌표는 각각 $\log_a(7/16), \log_a 28$ 이다. $a > 1$ 이므로 뒤의 값이 더 크다.

$$AB = \log_a 28 - \log_a \frac{7}{16} = \log_a 64 = 4.$$

따라서 $a^4 = 64, a = 2\sqrt{2}$ 이다.

정답: ③, $2\sqrt{2}$.

11번 · 적분으로 정의된 항등식 (원문 4쪽)

양변을 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 - 6x.$$

따라서 $x \neq 0$ 에서 $f'(x) = 6x + 6$ 이다. 다항식의 연속성에 의해 $x = 0$ 에서도 성립하므로 $f(x) = 3x^2 + 6x + C$ 이다.

원래 식에 $x = -1$ 을 넣으면 $0 = -f(-1) + 5$, 즉 $f(-1) = 5$ 이다. 따라서 $-3 + C = 5$, $C = 8$ 이다.

정답: ③, $f(0) = 8$.

12번 · 외접원과 사인법칙 (원문 4쪽)

코사인법칙으로

$$BC^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8} = 36.$$

따라서 $BC = 6$ 이고 $\sin \angle BAC = 3\sqrt{7}/8$ 이다. 외접원의 반지름을 R 라 하면

$$2R = \frac{6}{3\sqrt{7}/8} = \frac{16}{\sqrt{7}}.$$

삼각형 BCD에도 같은 외접원을 사용하므로

$$BD = 2R \sin \angle BCD = \frac{16}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} = 4\sqrt{2}.$$

정답: ④, $4\sqrt{2}$.

13번 · 정적분과 절댓값 넓이 (원문 5쪽)

$f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = 6x^2 + bx$ 라 놓는다. 정적분 조건은 $16 + 2b = 4$ 이므로

$$f(x) = 6x(x - 1).$$

ㄱ. 구간 $(0, 1)$ 에서는 음수, $(1, 2)$ 에서는 양수이다.

$$\int_0^1 f(x) dx = -1, \quad \int_1^2 f(x) dx = 5.$$

따라서 절댓값의 적분은 $1 + 5 = 6$ 이므로 참이다.

ㄴ. $g(1) = 0$ 인 일차함수는 $g(x) = m(x - 1)$ 꼴이다. $\int_0^2 g(x) dx = 0$ 이므로 주어진 적분은 항상 4이다. 참이다.

ㄷ. 임의의 $k > 6$ 에 대해 $m = k - 6 > 0$ 으로 놓고 $h(x) = m(x - 1)$ 을 택한다. 이때

$$f(x) + h(x) = (x - 1)(6x + m).$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $6x + m > 0$ 이므로 절댓값 적분은

$$\int_0^2 |f(x) + h(x)| dx = 6 + m \int_0^2 |x - 1| dx = 6 + m = k.$$

또한 h 의 적분이 0이어서 부호 있는 적분은 4이다. 따라서 ㄷ도 참이다.

정답: ⑤, ㄱ·ㄴ·ㄷ.

14번 · 세제곱수에 따른 합의 정수 조건 (원문 5쪽)

k 가 자연수이므로 $f(k) = 1/k$ 이다. k 가 세제곱수가 아니면 해당 항은 k , $k = m^3$ 이면 해당 항은 $m^2/5$ 이다.

$M = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ 라 하면 전체 합은

$$\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{m=1}^M m^3 + \frac{1}{5} \sum_{m=1}^M m^2.$$

앞의 두 항은 정수이며 전체 합은 양수이다. 따라서 자연수가 될 조건은 제곱합이 5의 배수인 것이다. $n \leq 300$ 이므로 $M = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 이고, 각각의 제곱합은 1, 5, 14, 30, 55, 91이다.

가능한 M 은 2, 4, 5이므로 n 의 범위는 $8 \leq n \leq 26$, $64 \leq n \leq 124$, $125 \leq n \leq 215$ 이다.

$$19 + 61 + 91 = 171.$$

정답: ⑤, 171.

15번 · 모든 점에서 유한한 극한이 존재할 조건 (원문 6쪽)

최고차항 계수가 1인 이차함수를 $f(x) = (x - c)^2 - d^2$ 로 쓸 수 있음을 먼저 확인한다. f 의 최솟값이 0 이상이면 모든 양수 t 에서 분모가 양수여서 주어진 집합이 나올 수 없다. 따라서 최솟값은 음수이며 $d > 0$ 으로 놓을 수 있다.

분모를 완전제곱식으로 정리하면

$$f(x) + f(x - t) = 2\left(x - c - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{2} - 2d^2.$$

$t > 2d$ 이면 분모는 항상 양수이다. $0 < t < 2d$ 이면 분모는 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이때 분모의 근이 f 의 근이기도 하려면 $f(x) = f(x - t) = 0$ 이어야 하는데, 두 근 사이의 간격은 $2d$ 이므로 불가능하다. 따라서 분자의 나머지 인수 $2x + 1$ 로는 분모의 두 근을 모두 소거할 수 없다.

결국 허용되는 양수 t 의 경계가 $2d = 3/2$ 여야 하므로 $d = 3/4$ 이다. 경계값 $t = 3/2$ 에서도 극한이 존재해야 한다. 이때 분모의 이중근은 $x = c + 3/4$ 이며, 이 점은 f 의 단순근이다. 분자가 이중으로 0이 되려면 $2x + 1$ 도 0이어야 한다.

$$c + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = -\frac{5}{4}.$$

따라서 두 근은 $-2, -1/2$ 이고

$$f(x) = (x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right), \quad f(2) = 10.$$

경계에서 실제로 분자의 이중인수가 소거되고, 경계보다 큰 t 에서는 분모가 양수이므로 충분조건도 성립한다.

정답: ④, 10.

16번 · 로그방정식 (원문 6쪽)

정의역은 $x > 3$ 이다. 밑을 3으로 통일하면

$$2\log_3(x - 3) = \log_3(2x - 3).$$

따라서 $(x - 3)^2 = 2x - 3$, 즉 $(x - 2)(x - 6) = 0$ 이다. 정의역을 만족하는 값은 6이다.

정답: 6.

17번 · 도함수에서 원함수 구하기 (원문 6쪽)

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + C.$$

$f(0) = 10$ 이므로 $C = 10$ 이고 $f(1) = 2 - 1 + 10 = 11$ 이다.

정답: 11.

18번 · 점화식 (원문 7쪽)

각 항의 홀짝에 맞춰 차례대로 계산한다.

$$28 \longrightarrow 14 \longrightarrow 7 \longrightarrow 26 \longrightarrow 13 \longrightarrow 38.$$

따라서 여섯째항은 38이다.

정답: 38.

19번 · 접선의 기울기와 절편 (원문 7쪽)

접점의 가로좌표를 t 라 하면

$$3t^2 - 6t - 1 = 8 \Rightarrow t = -1, 3.$$

두 접점 모두 세로좌표가 -1 이다. $t = -1$ 에서 접선은 $y = 8x + 7$, $t = 3$ 에서 접선은 $y = 8x - 25$ 이다.

세로절편이 양수인 것은 $y = 8x + 7$ 이다.

정답: $k = 15$.

20번 · 삼각함수 교점과 넓이비 (원문 7쪽)

$A = (a, \sin a)$ 라 하면 $\sin a = -k \cos a$ 이다. $k > 1$ 과 제1사분면 조건에서 $\pi/2 < a < 3\pi/4$ 이다. 주기와 대칭성을 사용하면

$$B = (a + \pi, -\sin a), \quad D = (\pi - a, -\sin a).$$

따라서 $p(a) = a + \pi$, $q(a) = \pi - a$ 이며 $DB = 2a$ 이다. 두 삼각형의 넓이는

$$[CDB] = 2a \sin a, \quad [AOD] = \frac{1}{2} |a(-\sin a) - (\pi - a) \sin a| = \frac{\pi}{2} \sin a.$$

넓이비가 $14:5$ 이므로 $4a/\pi = 14/5$, 즉 $a = 7\pi/10$ 이다. 따라서 빈칸의 $\alpha = 7\pi/10$ 이고

$$3 \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = 3 \frac{17\pi/10}{3\pi/10} = 17.$$

정답: 17.

21번 · 절댓값 함수의 미분 가능성 (원문 8쪽)

실근이 서로 다른 두 개뿐인 최고차항 계수 1의 삼차함수는

$$f(x) = (x - r)^2(x - s), \quad r \neq s$$

로 쓸 수 있다. 문제의 g 는 $g(x) = 3f(x) - 4|f(x)|$ 이다. 따라서

$$h(x) = 3f(x) + |P(x)| - 4|f(x)|, \quad P(x) = (x - 1)(x - a)(x - 4 + a).$$

$|f|$ 는 단순근 s 에서만 미분 불가능하다. 따라서 P 도 단순근이 정확히 하나여야 하며, 그 근이 s 여야 한다. 세 근 $1, a, 4 - a$ 중 둘이 같아야 하므로 $a = 1, 2, 3$ 만 가능하다.

단순근에서 $|P|$ 의 좌우미분계수 차이는 $2|P'(s)|$, $4|f|$ 의 차이는 $8|f'(s)|$ 이다. 두 꺾임이 상쇄될 조건은

$$|P'(s)| = 4|f'(s)| = 4(s - r)^2.$$

$a = 1$ 또는 3 이면 $P = (x - 1)^2(x - 3)$ 이다. 따라서 $s = 3$, $|P'(3)| = 4$ 이고 $r = 2$ 또는 4 이다. 이때 $f(0) = -12$ 또는 -48 이다.

$a = 2$ 이면 $P = (x - 1)(x - 2)^2$ 이다. 따라서 $s = 1$, $|P'(1)| = 1$ 이고 $r = 1/2$ 또는 $3/2$ 이다. 이때 $f(0) = -1/4$ 또는 $-9/4$ 이다.

각 경우 다른 근에서는 절댓값 함수도 미분 가능하므로 네 값이 모두 실제로 가능하다. 최댓값은 $-1/4$, 최솟값은 -48 이다.

정답: $(-1/4)(-48) = 12$.

22번 · 직사각형과 지수·로그함수 (원문 8쪽)

두 포물선을 $P(x) = 2x^2 - (7/2)x + 3$, $Q(x) = 2x^2 - (15/2)x + 15/2$ 라 하자. 이들은

$$Q(x+1) = P(x) - 1$$

을 만족한다. A, B 의 가로좌표를 각각 u, v 라 하고 $\vec{AD} = \vec{BC} = (d, e)$ 라 하자. 평행한 변 AB, DC 의 기울기는 각각

$$2(u+v) - \frac{7}{2}, \quad 2(u+v+2d) - \frac{15}{2}.$$

따라서 $d=1$ 이다. 위의 포물선 관계에 의해 $e=-1$ 이고, AD 와 AB 가 수직이므로 AB 의 기울기는 1이다. 즉

$$u+v = \frac{9}{4}, \quad AB: y = x + b.$$

$x=u, v$ 각각에 대해 $a^x = x + b$ 이다. 대응하는 아래쪽 꼭짓점은 $(x+1, x+b-1)$ 이며 로그곡선 위에 있으므로

$$a^{x+b-3/4} = x + \frac{3}{4}.$$

$K = a^{b-3/4}$ 라 놓으면 $K(x+b) = x + 3/4$ 가 서로 다른 $x=u, v$ 에서 성립한다. 두 식을 빼면 $K=1$ 이고, 다시 대입하면 $b=3/4$ 이다.

따라서 u, v 는 다음 방정식의 두 근이다.

$$2x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = x + \frac{3}{4} \Rightarrow 8x^2 - 18x + 9 = 0.$$

두 근은 $3/4, 3/2$ 이다. 그러므로 $a^{3/4} = 3/2$ 이고

$$a^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}.$$

정답: $p+q = 16+81 = 97$.

확률과 통계 · 23~30번

23번 · 같은 것이 있는 순열 (원문 9쪽)

다섯 숫자 중 3이 세 개 있으므로 서로 다른 배열의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20.$$

정답: ①, 20.

24번 · 조건부확률 (원문 9쪽)

$$P(A) = 1 - 2/5 = 3/5 \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(B | A)P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

정답: ④, 2/5.

25번 · 이항정리 (원문 10쪽)

$1/x^2$ 를 k 번 선택한 항은

$$\binom{4}{k}(2x^3)^{4-k}(x^{-2})^k = \binom{4}{k}2^{4-k}x^{12-5k}.$$

$12 - 5k = 2$ 에서 $k = 2$ 이다. 따라서 계수는 $\binom{4}{2}2^2 = 24$ 이다.

정답: ⑤, 24.

26번 · 합사건의 확률 (원문 10쪽)

전체 경우는 36가지이다. $a \leq 3$ 인 경우는 $3 \times 6 = 18$ 가지이다. 이와 겹치지 않게 $a > 3$ 에서 ab 가 8의 배수인 경우를 센다.

$a = 4$ 이면 $b = 2, 4, 6$ 의 3가지, $a = 5$ 이면 0가지, $a = 6$ 이면 $b = 4$ 의 1가지이다.

$$P = \frac{18+3+1}{36} = \frac{11}{18}.$$

정답: ②, 11/18.

27번 · 정규분포의 표준화 (원문 11쪽)

$Z = (X - 1)/\sigma$ 로 표준화하면

$$P\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sigma} \leq Z \leq 2 - \frac{1}{\sigma}\right) = 0.044.$$

표에서 $P(1.5 \leq Z \leq 2) = 0.4772 - 0.4332 = 0.044$ 이다. 길이가 0.5로 같은 구간의 정규확률은 구간 중심의 절댓값이 커질수록 작아진다. 따라서 해당 구간은 $[1.5, 2]$ 또는 그 대칭인 $[-2, -1.5]$ 여야 한다.

전자는 $1/\sigma = 0$ 을 요구하여 불가능하다. 후자에서 $1/\sigma = 7/2$, 즉 $\sigma = 2/7$ 이다.

$$P\left(X \geq \frac{10}{7}\right) = P\left(Z \geq \frac{10/7 - 1}{2/7}\right) = P(Z \geq 1.5) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668.$$

정답: ③, 0.0668.

28번 · 카드 교환과 조건부확률 (원문 11쪽)

초기 배열을 $S = AAABBB$ 라 하자. 한 번 시행한 뒤 S 가 유지되는 눈은 1, 2, 4, 5, 6의 다섯 가지이며, 눈 3에서만 $T = AABABB$ 가 된다.

두 번 시행한 결과를 세면 다음과 같다. 각 수는 서로 다른 주사위 눈의 순서쌍 수이다.

두 번 뒤 배열	경우의 수
AAABBB	26
AABABB	8
ABAABB	1
AABBAB	1

예를 들어 AAABBB로 오는 수는 $5 \times 5 + 1 = 26$, AABABB로 오는 수는 $5 \times 1 + 1 \times 3 = 8$ 이다. 다른 두 배열은 초기 상태에서 눈 3을 낸 뒤 각각 눈 2, 4를 내는 경우이다.

각 교환은 역으로 해도 같은 교환이다. 따라서 중간 두 번의 상태를 기준으로, 네 번 뒤 초기 배열로 돌아오는 경우의 수는

$$26^2 + 8^2 + 1^2 + 1^2 = 742.$$

세 번째 눈이 6이면 그 시행은 배열을 바꾸지 않는다. 그러므로 이 조건까지 만족하는 네 번의 경우의 수는 세 번 시행하여 처음으로 돌아오는 경우의 수와 같다. 이는

$$26 \cdot 5 + 8 \cdot 1 = 138.$$

따라서 구하는 조건부확률은 $138/742 = 69/371$ 이다.

정답: ⑤, 69/371.

29번 · 자연수 순서쌍의 개수 (원문 12쪽)

우선 $a + b + c + d = 14$ 를 만족하는 양의 정수 순서쌍은 $\binom{13}{3} = 286$ 개이다. 여기에서 조건을 어기는 것을 센다.

$d = 1$ 이면 $c < 1$ 을 만족할 수 없으므로 전부 제외한다. 개수는 $a + b + c = 13$ 의 양의 정수 해의 수인 $\binom{12}{2} = 66$ 이다.

$d = 2$ 에서는 $c \geq 4$ 인 해를 제외한다. $c' = c - 3 \geq 1$ 로 놓으면 $a + b + c' = 9$ 이므로 $\binom{8}{2} = 28$ 개이다.

$d = 3$ 에서는 $c \geq 9$ 인 해를 제외한다. 가능한 것은 $(a, b, c) = (1, 1, 9)$ 하나뿐이다.

$d \geq 4$ 에서는 $c \leq 12 - d < d^2$ 이므로 두 번째 부등식은 자동으로 성립한다. 첫 번째 부등식 $10a \geq d$ 는 $d \leq 10$ 에서 자동으로 성립한다. $d = 11$ 에서는 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 하나가 이를 위반하며, $d > 11$ 은 원래 합 조건상 불가능하다.

제외한 집합들은 서로 겹치지 않으므로

$$286 - 66 - 28 - 1 - 1 = 190.$$

정답: 190.

30번 · 표본합의 제공의 기댓값 (원문 12쪽)

다섯 번 뽑은 수를 $X_1, \dots, X_5$ 라 하고 $S = X_1 + \dots + X_5 = 5\bar{X}$ 라 하자. 문제의 합은 $E(S^2)$ 이다. $S = 0$ 인 항은 곱해지는 제공이 0이므로 합에서 빠져도 값이 같다.

한 번 뽑은 수에 대하여

$$E(X_i) = 1, \quad E(X_i^2) = \frac{5}{3}, \quad \text{Var}(X_i) = \frac{2}{3}.$$

복원추출로 시행들이 독립이므로 $E(S) = 5$, $\text{Var}(S) = 10/3$ 이다.

$$a = E(S^2) = \text{Var}(S) + E(S)^2 = \frac{10}{3} + 25 = \frac{85}{3}.$$

정답: $6a = 170$.

미적분 · 23~30번

23번 · 로그함수의 기본 극한 (원문 13쪽)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{2}.$$

정답: ④, $1/2$.

24번 · 부분적분 (원문 13쪽)

$(3x-2)e^x$ 를 미분하면 $(3x+1)e^x$ 이므로

$$\int_0^1 (3x+1)e^x dx = [(3x-2)e^x]_0^1 = e+2.$$

정답: ①, $e+2$.

25번 · 등비수열의 수렴 (원문 14쪽)

실수 r 에 대해 수열 r^n 이 수렴하는 조건은 $-1 < r \leq 1$ 이다. 공비가 -1 이면 진동하고, 1 이면 상수수열이므로 수렴한다는 점에 유의한다.

$$-1 < \frac{k^2-20}{16} \leq 1 \Rightarrow 4 < k^2 \leq 36.$$

정수 k 는 $\pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ 의 8개이다.

정답: ③, 8.

26번 · 곡선과 접선 사이의 넓이 (원문 14쪽)

곡선의 도함수는 $-2(2x+1)/(x^2+x)^2$ 이므로 $(1, 1)$ 에서 기울기는 $-3/2$ 이다. 접선은 $y = -(3/2)x + 5/2$ 이다.

곡선과 접선의 차는

$$\frac{2}{x^2+x} + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = \frac{(x-1)^2(3x+4)}{2x(x+1)} \geq 0 \quad (x > 0).$$

따라서 $1 \leq x \leq 2$ 에서 곡선이 위쪽에 있다. 부분분수 $2/(x^2+x) = 2/x - 2/(x+1)$ 를 사용하면 넓이는

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \right) dx = 2\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4}.$$

정답: ②, $2\ln(4/3) - 1/4$.

27번 · 역관계의 미분과 합성함수 (원문 15쪽)

$t \geq e$ 에서 $f(t) = (\ln t)^3 - 3\ln t$ 이고 $g(f(t)) = t^2$ 이다. $f(t) = 0$ 이 되는 $t \geq e$ 를 찾으면 $\ln t = \sqrt{3}$, 즉 $t = e^{\sqrt{3}}$ 이다.

관계식을 미분하면 $g'(f(t))f'(t) = 2t$ 이고

$$f'(t) = \frac{3(\ln t)^2 - 3}{t}.$$

따라서 $t = e^{\sqrt{3}}$ 에서

$$g'(0) = \frac{2e^{\sqrt{3}}}{6e^{-\sqrt{3}}} = \frac{e^{2\sqrt{3}}}{3}.$$

$f(1) = 0, f'(1) = -3$ 이므로

$$h'(1) = g'(f(1))f'(1) = -e^{2\sqrt{3}}.$$

정답: ㉟, $-e^{2\sqrt{3}}$.

28번 · 원의 넓이와 각의 변화율 (원문 15쪽)

$O = (0, 0), A = (5, 0), B = (2, 0)$ 으로 놓고 $P = (2\cos \theta, 2\sin \theta)$ 라 하자. 그림의 위쪽 반평면을 택해도 일반성을 잃지 않는다. P 가 가까운 교점이므로 $0 < \theta < \arccos(2/5)$ 이다.

문제의 넓이는 삼각형 OAP 에서 부채꼴 OBP 를 뺀 값이다.

$$t = 5\sin \theta - 2\theta, \quad \frac{dt}{d\theta} = 5\cos \theta - 2 > 0.$$

$\phi = \angle OPQ = f(t)$ 라 하고 $L = AP$ 라 하자. 벡터 $\vec{PO}$ 와 $\vec{PQ}$ 의 내적 및 넓이를 사용하면

$$\cos \phi = \frac{5\cos \theta - 2}{L}, \quad \sin \phi = \frac{5\sin \theta}{L}, \quad L^2 = 29 - 20\cos \theta.$$

따라서 $\tan \phi = 5\sin \theta / (5\cos \theta - 2)$ 이다. 이 값이 $3/2$ 일 때

$$10\sin \theta = 15\cos \theta - 6.$$

제곱하여 정리하면 $325\cos^2 \theta - 180\cos \theta - 64 = 0$ 이다. 두 대수적 해 중 범위를 만족하는 것은 $\cos \theta = 4/5$ 이며, $\sin \theta = 3/5$ 이다. 원래 식에도 성립한다.

위의 탄젠트 관계를 미분하면

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{25 - 10\cos \theta}{29 - 20\cos \theta}.$$

따라서 구하는 미분계수는

$$f'(k) = \frac{d\phi/d\theta}{dt/d\theta} = \frac{17/13}{2} = \frac{17}{26}.$$

정답: ㉠, $17/26$.

29번 · 조각으로 정의된 수열과 급수 (원문 16쪽)

$a_1 = A > 0$, 공비를 r 라 하면 $a_2 < 0$ 이므로 $r < 0$ 이다. 급수가 수렴하려면 $b_n \rightarrow 0$ 이어야 한다. $r \leq -1$ 이면 짝수 번째 항에서 이 조건을 만족할 수 없으므로 $-1 < r < 0$ 이다.

$(b_2)^2 = 36b_3$ 이므로 $b_3 \geq 0$ 이다. 만약 $a_3 = Ar^2 \geq 10$ 이면 $b_3 = A(r^2 - 1) < 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $a_3 < 10$ 이며, 그 뒤의 항도 절댓값이 모두 10보다 작다.

먼저 $|a_2| < 10$ 이라고 가정하면 $b_2 = A^2 r^2$, $b_3 = A^2 r^4$ 이다. 조건에서 $A = 6$ 을 얻는다. 이때 처음부터 모든 항이 제곱으로 정의되므로 급수의 합이 $36/(1 - r^2) > 36$ 이어서 12가 될 수 없다.

따라서 $|a_2| \geq 10$ 이다. 이때 $A > 10$, $b_1 = 0$, $b_2 = A(r - 1)$ 이므로

$$A^2(r - 1)^2 = 36A^2 r^4 \Rightarrow 1 - r = 6r^2.$$

음의 해는 $r = -1/2$ 이다. $|a_2| \geq 10$, $a_3 < 10$ 에서 $20 \leq A < 40$ 이다. 급수의 합 조건은

$$-\frac{3}{2}A + \frac{A^2/16}{1-1/4} = 12 \Rightarrow A^2 - 18A - 144 = 0.$$

조건을 만족하는 해는 $A = 24$ 이다. 따라서 $a_4 = -3$, $a_6 = -3/4$ 이다.

정답: $36a_4a_6 = 81$.

30번 · 역함수 적분과 치환 (원문 16쪽)

$$f(t) = 2^{2t + (1/2)\cos \pi t}.$$

$2 - (\pi/2)\sin \pi t > 0$ 이므로 f 는 증가하며, g 는 그 역함수이다. 첫 번째 적분에 역함수 적분 공식을 적용하면

$$\frac{1}{4} \int_{f(1)}^{f(3)} g(x) dx = \frac{1}{4} \left(3f(3) - f(1) - \int_1^3 f(t) dt \right).$$

두 번째 적분에서는 $t = g(x)$, $x = f(t)$ 로 치환한다.

$$\int_{f(0)}^{f(2)} \frac{2^{4g(x)} g'(x)}{x} dx = \int_0^2 \frac{2^{4t}}{f(t)} dt.$$

코사인의 성질에 의해

$$\frac{2^{4t}}{f(t)} = 2^{2t - (1/2)\cos \pi t} = \frac{1}{4} f(t + 1).$$

그러므로 두 번째 적분은 $(1/4) \int_1^3 f(t) dt$ 이며, 첫 번째 식의 적분항과 상쇄된다. $f(1) = 2\sqrt{2}$, $f(3) = 32\sqrt{2}$ 이므로 전체 값은

$$\frac{1}{4} (3 \cdot 32\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = \frac{47}{2} \sqrt{2}.$$

정답: $p + q = 2 + 47 = 49$.

기하 · 23~30번

23번 · 벡터의 성분 (원문 17쪽)

$$2\vec{a} + \vec{b} = (3k, 7).$$

모든 성분의 합이 10이므로 $3k + 7 = 10$, $k = 1$ 이다.

정답: ①, 1.

24번 · 공간에서의 내분점 (원문 17쪽)

AB를 3 : 2로 내분하는 점은 $(2A + 3B)/5$ 이다. 각 성분을 비교하면

$$\frac{2a+18}{5} = 4, \quad \frac{-8+3b}{5} = -1.$$

따라서 $a = 1$, $b = 1$ 이다. 세 번째 성분도 $15/5 = 3$ 으로 일치한다.

정답: ②, $a + b = 2$.

25번 · 타원의 초점거리 (원문 18쪽)

단축의 길이가 6이므로 단반지름은 3이다. 장반지름을 a 라 하면

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

점 $(4, \sqrt{5})$ 를 대입하면 $16/a^2 + 5/9 = 1$ 이므로 $a^2 = 36$ 이다. 초점거리의 절반 c 는 $c^2 = a^2 - 9 = 27$ 을 만족한다.

정답: ④, $FF' = 2c = 6\sqrt{3}$.

26번 · 원기둥의 공간 삼각형 (원문 18쪽)

아래 밑면의 중심을 원점으로 놓고 $A = (-3, 0, 0)$, $B = (3, 0, 0)$ 으로 잡는다. 높이와 BC가 모두 3이므로 C는 B의 바로 위에 있어 $C = (3, 0, 3)$ 이다.

$D = (u, v, 3)$ 라 하면 $u^2 + v^2 = 9$ 이다. 현 CD의 길이 조건에서

$$24 = (u - 3)^2 + v^2 = 18 - 6u \Rightarrow u = -1, \quad v^2 = 8.$$

직선 AB는 가로축이므로 D에서 직선 AB까지의 거리는 $\sqrt{v^2 + 3^2} = \sqrt{17}$ 이다. 따라서 삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{17} = 3\sqrt{17}.$$

정답: ⑤, $3\sqrt{17}$.

27번 · 포물선의 접선과 법선 (원문 19쪽)

포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점은 $(p, 0)$, 준선은 $x = -p$ 이다. 포물선 위 점의 초점까지의 거리가 $x + p = 3p$ 이므로

$$A = (2p, 2\sqrt{2}p).$$

접선의 기울기는 $2p/y = 1/\sqrt{2}$ 이므로 접선은 $y = (x + 2p)/\sqrt{2}$ 이다. 따라서 $B = (0, \sqrt{2}p)$ 이다.

법선의 기울기는 $-\sqrt{2}$ 이므로 법선은 $y = -\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}p$ 이고, $C = (0, 4\sqrt{2}p)$ 이다.

$$[ACB] = \frac{1}{2}(3\sqrt{2}p)(2p) = 3\sqrt{2}p^2 = 16\sqrt{2}.$$

따라서 $p^2 = 16/3$ 이며 $p > 0$ 이다.

정답: ③, $p = 4\sqrt{3}/3$.

28번 · 구 위의 점과 정사영 (원문 19쪽)

ABC는 정삼각형이다. 좌표를 회전하여 그 평면을 $z = h$ 로 놓고, 구의 중심을 원점으로 둔다. 평면과 구가 만나는 원의 반지름을 r 라 하면

$$A = (r, 0, h), \quad B = (-r/2, \sqrt{3}r/2, h), \quad C = (-r/2, -\sqrt{3}r/2, h), \quad r^2 + h^2 = 9.$$

직선 OD가 평면 ABC와 평행하므로 D의 세 번째 좌표는 0이다. 또한 $BD = CD$ 이므로 두 번째 좌표도 0이다. 따라서 $D = (d, 0, 0)$ 에서 $d = 3$ 또는 -3 이다.

$AB^2 = 3r^2$, $BD^2 = 18 + dr$ 이므로 $3r^2 = 18 + dr$ 이다. $d = 3$ 이면 양의 해는 $r = 3$ 이고 $h = 0$ 이 되어 $D = A$ 가 된다. 네 점이 서로 다르다는 조건에 어긋나므로 제외한다.

$d = -3$ 이면 $r^2 + r - 6 = 0$ 에서 $r = 2$ 이다. 따라서 $h^2 = 5$, 공통 변의 길이의 제곱은 12이다. 위치벡터를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라 하면

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 3.$$

두 평면의 공통 직선 OA에 수직인 성분은 각각 $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}/3$, $\vec{v} = \vec{c} - \vec{a}/3$ 이다. 이들은 $|\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 = 8$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ 를 만족한다. 두 평면 사이의 각을 ω 라 하면

$$\cos \omega = \frac{2}{\sqrt{8}\sqrt{8}} = \frac{1}{4}.$$

삼각형 OAB의 넓이는 $\sqrt{81 - 9}/2 = 3\sqrt{2}$ 이다. 정사영의 넓이는 원래 넓이에 $\cos \omega$ 를 곱한 값이다.

정답: ②, $3\sqrt{2}/4$.

29번 · 쌍곡선과 타원의 거리 조건 (원문 20쪽)

대칭성에 의해 $PF = PF' = L$, $PA = PB = u$, $AF = v$ 라 놓을 수 있다. A가 선분 PF 위에 있으므로 $L = u + v$ 이다.

쌍곡선의 두 초점까지 거리 차이는 8이다. A는 오른쪽 가지 위에 있으므로 $AF' = v + 8$ 이며, 대칭성으로 $BF = v + 8$ 이다. 초점이 A, B인 타원에 P와 F가 모두 속하므로

$$PA + PB = FA + FB \Rightarrow 2u = 2v + 8.$$

따라서 $u = v + 4$ 이다.

$\theta = \angle FPO$ 라 하자. C는 P에서 오른쪽으로 향하는 수평선 위에 있다. 따라서 $\angle APF' = 2\theta$, $\angle APC = \pi/2 - \theta$ 이다. 두 각이 같으므로 $\theta = \pi/6$ 이다.

이로부터 $p = \sqrt{3}c$, $L = 2c$ 이며 $u = c + 2$, $v = c - 2$ 이다. P에서 F로 u 만큼 간 점이 A이므로

$$A = \left(\frac{c+2}{2}, \frac{\sqrt{3}(c-2)}{2} \right).$$

따라서 A와 $F' = (-c, 0)$ 사이의 거리의 제곱은

$$AF'^2 = \left(\frac{3c+2}{2} \right)^2 + \frac{3(c-2)^2}{4} = 3c^2 + 4.$$

그런데 $AF' = v + 8 = c + 6$ 이므로 $3c^2 + 4 = (c + 6)^2$ 이다. 양의 해는 $c = 8$ 이다. 따라서

$$P = (0, 8\sqrt{3}), \quad A = (5, 3\sqrt{3}), \quad F' = (-8, 0), \quad AP = 10, \quad AF' = 14.$$

직선 F'A에서 세로좌표가 0에서 $3\sqrt{3}$ 으로 증가할 때 가로좌표는 13 증가한다. C의 세로좌표는 $8\sqrt{3}$ 이므로

$$C = \left(\frac{80}{3}, 8\sqrt{3} \right), \quad PC = \frac{80}{3}.$$

또한 $AC/AF' = 5/3$ 이므로 $AC = 70/3$ 이다.

정답: 둘레 $= 10 + 80/3 + 70/3 = 60$.

30번 · 사다리꼴과 두 원의 교점 (원문 20쪽)

두 밑각이 같은 이등변사다리꼴이므로 좌표를

$$A = (-12, 0), \quad B = (12, 0), \quad D = (-d, h), \quad C = (d, h)$$

로 잡는다. 밑각이 예각이므로 $0 < d < 12, h > 0$ 이다. 옆변의 길이와 내적 조건은 각각

$$(12 - d)^2 + h^2 = 338, \quad 48d = h^2 - (12 - d)^2.$$

두 식을 정리하면 $2d^2 + 288 = 338$ 이므로 $d = 5, h = 17$ 이다. 따라서 $D = (-5, 17), C = (5, 17)$ 이다.

$X = (x, y)$ 라 하면 첫 번째 직교 조건은

$$\vec{XA} \cdot \vec{XD} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 17x - 17y + 60 = 0.$$

두 번째 직교 조건은

$$\vec{XB} \cdot \vec{XC} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 17x - 17y + 60 = 0.$$

두 식을 빼면 $x = 0$ 이다. 대입하면 $y^2 - 17y + 60 = (y - 5)(y - 12) = 0$ 이므로 가능한 x 는 $(0, 5)$ 와 $(0, 12)$ 두 점뿐이다.

$$\vec{AD} \cdot \vec{AX} = (7, 17) \cdot (12, y) = 84 + 17y.$$

두 점에서의 값은 각각 169와 288이다.

정답: $169 + 288 = 457$.